Análisis Complejo: 2.1 Principios del máximo

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

31/Octubre/2006: Objetivos

Objetivos

- Demostrar que las funciones continuas con la propiedad de la media satisfacen el principio del máximo. Demostrar el principio del módulo máximo para funciones holomorfas.

Objetivos

- Demostrar que las funciones continuas con la propiedad de la media satisfacen el principio del máximo. Demostrar el principio del módulo máximo para funciones holomorfas.
- Obtener el lema de Schwarz a partir del principio del máximo.

31/Octubre/2006: Objetivos

Objetivos

- Demostrar que las funciones continuas con la propiedad de la media satisfacen el principio del máximo. Demostrar el principio del módulo máximo para funciones holomorfas.
- Obtener el lema de Schwarz a partir del principio del máximo.
- Caracterizar los isomorfismos conformes del disco unidad en si mismo.

Definición

Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función continua. Se dice que:

- f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

- f es subarmónica si $f(\Omega)\subset\mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

Principio del máximo

Definición

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que:

- f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

- f es subarmónica si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$,

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

Ejemplos

- Toda función holomorfa tiene la propiedad de la media.

Principio del máximo

Definición

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que:

- f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

- f es subarmónica si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$,

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt.$$

Ejemplos

- Toda función holomorfa tiene la propiedad de la media.
- La parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa satisface la propiedad de la media.

Principio del máximo

Definición

Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función continua. Se dice que:

- f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})dt.$$

- f es subarmónica si $f(\Omega)\subset\mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$,

$$f(a)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})dt.$$

Ejemplos

- Toda función holomorfa tiene la propiedad de la media.
- La parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa satisface la propiedad de la media.
- El módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

Principio del máximo

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

Principio del máximo

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

Teorema del módulo máximo

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $|f|$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante.

Principio del máximo

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

Teorema del módulo máximo

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $|f|$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante.

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $\operatorname{Re} f$ o $\operatorname{Im} f$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante.

Versión General del Principio del Máximo máximo

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq c,$$

para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entones o bien $u(z) < c$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para cada $z \in \Omega$.

Versión General del Principio del Máximo máximo

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si

$$\limsup_{z \to a} u(z) \leq c,$$

para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entones o bien $u(z) < c$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para cada $z \in \Omega$.

Corolario

Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua cuya restricción a $\overset{o}{K} =: \Omega$ es holomorfa. Entonces existe $a \in \partial K$ tal que:

$$|f(a)| = \max\{|f(z)| : z \in K\}.$$

Lema de Schwarz

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Entonces

$$|f(z)| \leq |z| \text{ para cada } z \in D(0,1) \text{ y } |f'(0)| \leq 1.$$

Si $|f(a)| = |a|$ para algún $a \neq 0$, ó si $|f'(0)| = 1$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\alpha} z$.

Isomorfismos del disco unidad

Corolario

$f : D(0,1) \to D(0,1)$ es un biyección holomorfa si y sólo si existen $a \in D(0,1)$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Isomorfismos del disco unidad

Corolario

$f : D(0,1) \to D(0,1)$ es un biyección holomorfa si y sólo si existen $a \in D(0,1)$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Corolario

Sea $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ tal que $f(D(0,1)) \subset D(0,1)$. Entonces para cada $a \in D(0,1)$ se cumple

$$|f'(a)| \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

y si en algún $a \in D(0,1)$ se cumple la igualdad entonces f es una biyección holomorfa de $D(0,1)$ en si mismo. En particular, si f no es inyectiva se cumple $|f'(0)| < 1$.

Ejercicio

Ejercicio

Sea $Q := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, |x| < 1, |y| < 1\}$. Sea $f : D(0,1) \to Q$ una biyección holomorfa con $f(0) = 0$. Pruébese que se verifica $f(iz) = if(z)$ para cada $z \in D(0,1)$ y deducir de ahí que en el desarrollo en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ para } |z| < 1,$$

se tiene que $a_n = 0$ si $(n-1) \neq \dot{4}$.